2017年　東大文系数学　第4問　理系数学　第4問　その2.

(3) 自然数で証明と来たら帰納法

以下、数学的帰納法により証明する。

(i) $a_1 = 4$ より、自然数である。
$a_2 = 18$ より自然数である。

(ii) $a_k = m_1$　$a_{k+1} = m_2$ （但し、m_1, m_2 は自然数）
となると仮定し、
a_{k+2} が自然数となることを示す。

(2) の結果、$a_1 a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ より

$4 \cdot a_{k+1} = a_{k+2} - a_k$
$\Leftrightarrow a_{k+2} = 4a_{k+1} + a_k$ である。

$a_k = m_1$, $a_{k+1} = m_2$ を代入すると、
$a_{k+2} = 4m_2 + m_1$ であり、
a_{k+2} も自然数である。

よって、すべての自然数 n において、a_n は自然数である。

↑ いわゆる"強化帰納法"を用いた。

(4) $a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$ であるが、

これは、a_{n+1} を a_n で割ると、商が4で余りが a_{n-1} であることを意味する。

すると、ユークリッドの互除法により、
a_{n+1} と a_n の最大公約数は、
a_n と a_{n-1} の　　　:　　　に等しい。

これを繰り返すと、a_{n-1} と a_{n-2} の最大公約数と等しく、… となり、結局、a_2 と a_1 の最大公約数と等しくなる。

a_2 と a_1 の最大公約数は、2なので、求めるものは2.

最大公約数は、数IA、IIB、III含めて、
数Aの整数分野にしか出ない。
メインは、ユークリッドの互除法だし、
普段から、大きい数の最大公約数を、
帰納的に、小さい数の最大公約数にして、
計算している。
数列でも同じことが出来る。